УДК 530.145

А. А. Иванов, А. И. Иванов

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МАНИПУЛИРОВАНИЕ СПИНОМ ЭЛЕКТРОНА В КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Рассмотрен механизм манипулирования спином электрона в квантовой точке с помощью электрического поля при наличии слабого магнитного поля на основе динамических инвариантов Левиса — Ризенфельда. Сформулированы необходимые условия спин-флип процесса.

In this paper we discuss electrical manipulation of a spin an electron in quantum dot within a weak magnetic field. Approach to describing this process is based on Lewis — Riesenfeld dynamical invariants. Necessary conditions of a spin-flip process are derived.

Ключевые слова: кубит, динамические инварианты, спин-флип.

Key words: qubit, dynamical invariants, spin-flip.

Возможности контролируемого изменения спинового состояния электронов в полупроводниках активно исследуются экспериментально и теоретически. В частности, манипулирование спином одного или двух электронов в квантовой точке вызывает интерес в связи с возможными применениями в квантовых вычислениях. Например, в работе [1] предложен универсальный набор квантовых гейтов на основе зависящего от времени обменного взаимодействия и локального магнитного поля. Однако создать локальное магнитное поле в нанометровой области довольно сложно. Гораздо проще оказалось создать переменное во времени электрическое поле в нанометровой области с помощью локальных электродов и манипулировать спином, используя спин-орбитальное взаимодействие [2—4].

В работе [5] спин-орбитальное взаимодействие рассматривается как механизм спин-флип процесса для спина электрона в квантовой точке при наличии слабого магнитного поля. Основой подхода являются динамические инварианты Левиса — Ризенфельда [6]. Учеными использована достаточно простая параметризация инварианта, однако решения квантовых уравнений движения не получены, а приведена лишь их аппроксимация полиномами третьей степени. В данной работе предлагается способ решения этих уравнений. Рассмотрим квантовую точку, образованную в двумерном электронном газе, в плоскости x–y, помещенную в слабое магнитное поле B_0, направленное перпендикулярно этой плоскости. Переменное электрическое поле $E(t)$ позволяет манипулировать спином электрона в квантовой точке (рис. 1).

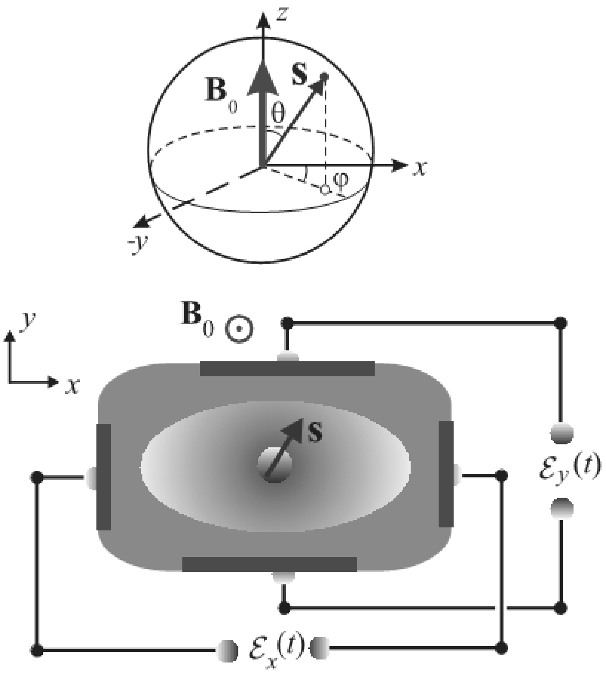

Рис. 1. Спиновая динамика электрона в квантовой точке
в присутствии электрических полей E(t) и магнитного поля B_0

Гамильтониан электрона в квантовой точке запишем в виде следующего выражения [3]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{SO} + \hat{H}_{int} \ . \tag{1}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + U(x, y) + \Delta_z \hat{\sigma}_z / 2.$$

$$\hat{H}_{SO} = (-\alpha\hat{\sigma}_y + \beta\hat{\sigma}_z)\hat{p}_x + \alpha\hat{\sigma}_x\hat{p}_x.$$

$$\hat{H}_{int} = -\frac{e}{c}\vec{A}(t)\vec{V}.$$

Здесь m — эффективная масса электрона; $U(x,y)$ — удерживающий потенциал; $\Delta z = g\mu_B B_0$; μ_B — магнетон Бора; g — фактор Ландэ; $A(t)$ — векторный потенциал в плоскости x–y. Пусть электрон в удерживающем потенциале заполняет пространственную орбиталь. Спин-орбитали, соответствующие состояниям *spin-up* и *spin-down* этого электрона обозначим

$$\psi_1 = \varphi_1 \,|\, 1\rangle \,,\; \psi_2 = \varphi_1 \,|-1\rangle \,. \tag{2}$$

В работе [5] полный гамильтониан (1) редуцирован в эффективный гамильтониан, который, в отличие, например, от работ [7; 8], строится в пространстве меньшей размерности. При этом вклад от «неактуальных» состояний учитывается с помощью параметров. Эффективный гамильтониан в базисе (2) в соответствии с работой [5] имеет вид

$$\hat{H}_{eff} = \begin{pmatrix} Z & X+iY \\ X-iY & -Z \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $X = -e\alpha(1+\xi_y)A_y / c;\ \ Y = -e\alpha(1+\xi_x)A_x / c;\ \ Z = g\mu_B B_0 / 2 - e\beta(1+\xi_x)A_x / c.$

Параметры ξ_x и ξ_y учитывают влияние «неактуальных» состояний. Напряженности изменяющихся во времени электрических полей при этом известным образом связаны с компонентами векторного потенциала

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i(t)}{\partial t}(i = x, y).$$

Для квантовой системы с эффективным гамильтонианом $H_{eff}(t)$ динамический инвариант $I(t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t} = [H_{eff}(t), I(t)]. \qquad (4)$$

В работе [9] предложено выразить инвариант двухуровневой системы через оператор проекции спина на изменяющееся во времени направление, задаваемое углами Θ и φ:

$$I(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{i\varphi}\sin\theta \\ e^{-i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Легко видеть, что уравнение на собственные значения и собственные функции такого инварианта

$$I(t)\left|\chi_\pm(t)\right\rangle = \lambda_\pm\left|\chi_\pm(t)\right\rangle$$

имеет решения

$$\left|\chi_+(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\varphi(t)}\cos(\theta(t)/2) \\ \sin(\theta(t)/2) \end{pmatrix}, \left|\chi_-(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)/2) \\ -e^{-i\varphi(t)}\cos(\theta(t)/2) \end{pmatrix}, \lambda_\pm = \pm\hbar/2.$$

Согласно теореме Левиса — Ризенфельда [6] решение уравнения Шредингера с эффективным гамильтонианом $H_{eff}(t)$ может быть представлено в виде суперпозиции

$$\psi(t) = \sum_n c_n e^{i\gamma_n(t)}\left|\chi_n(t)\right\rangle, \qquad (6)$$

где $\gamma_n(t) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \left\langle\chi_n(t')\right| i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H_{eff}(t')\left|\chi_n(t')\right\rangle dt'$; c_n — постоянные коэффициенты; n = +,–.

Подставляя далее выражение (5) в уравнение (4) и учитывая эффективный гамильтониан (3) для нахождения зависимости от времени углов Θ и φ, получаем систему уравнений

$$\dot{\theta} = \eta(X\sin\varphi - Y\cos\varphi), \tag{7}$$

$$\dot{\varphi} = \eta(X\cos\varphi ctg\theta + Y\sin\varphi ctg\theta - Z), \tag{8}$$

где $\eta = 2/\hbar$.

Положим теперь $A_x = \dfrac{A_0 \cos\varphi}{(1+\xi_x)}$, $A_y = -\dfrac{A_0 \sin\varphi}{(1+\xi_y)}$.

Тогда уравнение (7) примет вид

$$\dot{\theta} = \Omega, \tag{9}$$

где $\Omega = 2e\alpha A_0 / c\hbar$. (10)

Из уравнения (9) находим

$$\theta(t) = \Omega t + \theta_0. \tag{11}$$

Уравнение (8) примет вид

$$\dot{\varphi} = a\cos\varphi - b, \tag{12}$$

где $a \equiv 2e\beta A_0 / c\hbar$, $b \equiv g\mu_B B_0 / \hbar$.

Рассмотрим три случая решения уравнений:

1. Пусть $a < b$, что соответствует неравенству

$$cg\mu_B B_0 / 2e\beta A_0 > 1.$$

Тогда решение уравнения (13) имеет вид

$$\varphi(t) = 2arctg\left\{\frac{\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} tg\left[t\sqrt{b^2-a^2}/2 + arctg\,\frac{ctg(\varphi(0)/2)\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}\right]\right\}.$$

2. Пусть $a > b$. Тогда решение уравнения (12) можно представить как

$$\Phi(t) = \Phi(0)\exp(t\sqrt{a^2-b^2}),$$

$$\Phi(t) = \left|\frac{\sqrt{a+b}/\sqrt{a-b} + ctg(\varphi(t)/2)}{\sqrt{a+b}/\sqrt{a-b} - ctg(\varphi(t)/2)}\right|.$$

3. Пусть $a = b$. Тогда решение уравнения (12) имеет вид

$$\varphi(t) = 2arctg(at + ctg(\varphi(0)/2)).$$

Полученные решения позволяют сформулировать необходимые условия спин-флип процесса. Действительно, пусть в начальный момент времени $t = 0$ электрон находится в спиновом состоянии, соответствующем одному из полюсов сферы Блоха, например $\Theta = 0$. Это соответствует выбору в формуле (7) $C_+ = 1$, $C_- = 0$ и в формуле (11) $\Theta_0 = 0$. Что касается фазы начального состояния, то следует заметить, что для состояний, соответствующих полюсам сферы Блоха, эта величина не является хорошо определенной. Из формул (10), (11) следует, что для времени t_k наступления момента спин-флип необходимо соблюдение условия

$$t_k = \pi c\hbar k / 2e\alpha A_0, k = 1, 2, \ldots .$$

В заключение отметим, что при выполнении третьего условия частота Ω такого спинового гармонического осциллятора совпадает с частотой его циркулярно-поляризованного излучения, направленного вдоль внешнего магнитного поля.

Список литературы

1. *Loss D., DiVincenzo D.P.* Quantum computation with quantum dots // Phys. Rev. 1998. A 57. P. 120—126.

2. *Rashba E. I., Efros Al. L.* Orbital Mechanisms of Electron-Spin Manipulation by an Electric Field // Phys. Rev. 2003. Lett. 91. 126405.

3. *Rashba E.I.* Theory of electric dipole spin resonance in quantum dots: Mean field theory with Gaussian fluctuations and beyond // Phys. Rev. 2008. B 78. 195302.

4. *Boyer de la Giroday A. et al.* All-electrical coherent control of the exciton states in a single quantum dot // Phys. Rev. 2010. B 82. 241301(R).

5. *Ban Y., Chen X., Sherman E.Ya., Muga J. G.* Fast and robust spin manipulation in a quantum dot by electric fields // Phys. Rev. 2012. Lett. 109. 206602.

6. *Lewis H.R., Riesenfeld W.B.* An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field // J. Math Phys. 1969. 10. 1458.

7. *Иванов А.И., Иванов А.А.* Применение метода эффективного гамильтониана в динамике открытых квантовых систем // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2009. Вып. 4. С. 25.

8. *Иванов А.А., Иванов А.И.* О взаимодействии кубита с флуктуирующим окружением // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2012. Вып. 4. С. 7.

9. *Chen X., Torrontegui E., Muga J.G.* Lewis-Riesenfeld invariants and transitionless quantum driving // Phys. Rev. 2011. A 83. 062116.

Об авторах

Александр Алексеевич Иванов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: aivanov023@gmail.com

Алексей Иванович Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru

About authors

Aleksander Ivanov — PhD stud., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: aivanov023@gmail.com

Dr Aleksey Ivanov — prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru